ÜBER KRITERIEN HÖHERER ORDNUNG

ZUR UNTERSCHEIDUNG DER

RELATIVEN MAXIMA UND MINIMA BESTIMMTER INTEGRALE

BEI

VORHANDENEM SYSTEME ZWEIFELHAFTER NACHBARWERTHE.

VON

LORENZ ŻMURKO,
K. K. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT UND DER K. K. TECHNISCHEN AKADEMIE ZU LEMBERG.

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 20. JULI 1876.

In der vorigen Abhandlung: „Über die Kriterien des Grössten und Kleinsten bestimmter Integrale“, Bd. XXXVI, p. 235—250, habe ich nur den Fall in Erledigung gebracht, wo in Bezug auf die zweite Variation des in Untersuchung stehenden Integrals die Kriteriengleichung (11) §. 3

$$A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + \ldots + A_{\mu-\nu-1} s^{\mu-\nu-1} + A_{\mu-\nu} s^{\mu-\nu} = 0 \tag{1}$$

vor einem identischen Verschwinden des Coëfficienten $A_0 = \nabla_0$ als gesichert angenommen wurde. Im Falle des Verschwindens von A_0 wurde dort auf ein System von ψ-Werthen gewiesen, welche ein identisches Verschwinden von M_2 und demzufolge auch ein identisches Verschwinden von $\delta^2 \mathfrak{J}$ nach sich ziehen — und falls sonst die Function M_2 ein constantes Vorzeichen darbieten sollte, solle man die speciellen ψ-Functionen in die höheren Variationen $\delta^3 \mathfrak{J}$, $\delta \mathfrak{J} \ldots$ einführen, und nachsehen, ob hiebei $\delta^3 \mathfrak{J}$ auch identisch verschwindet, und ob zugleich $\delta^4 \mathfrak{J}$ für alle im vorgeschriebenen Intervalle liegenden Werthe von x_1, $x_2, \ldots x_r$ ein constantes Vorzeichen beurkundet. Mit Hinblick auf eine solche Eventualität wurde der Schluss begründet, dass hiedurch ein Maximum oder Minimum angedeutet wird, je nachdem neben $\delta^3 \mathfrak{J} = 0$ der Ausdruck $\delta^4 \mathfrak{J}$ sich entsprechend negativ oder positiv gestaltet.

Im Falle eines identischen Verschwindens von $A_0 = A_1 = 0$ ergeben sich sehr viele Systeme von ψ-Werthen, welche ein identisches Verschwinden von M_2 und hiemit auch von $\delta^2 \mathfrak{J}$ nach sich ziehen, und dürften bei sonst zeichenfestem M_2 noch eine mannigfaltigere Consultation der Variationen $\delta^3 \mathfrak{J}$, $\delta^4 \mathfrak{J}$ und vielleicht auch noch höherer Variationen erheischen. Es sind auch Fälle möglich, wo M_2 auf Grundlage der Bedingungen $\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_\nu = 0$ unabhängig von den ψ-Werthen verschwindet, und wo in gleicher Weise nebst $\delta^2 \mathfrak{J}$ auch noch weitere Variationen identisch verschwinden, und demgemäss unfähig werden, eine Erkenntniss der specifischen Unterschiede zwischen den Nachbargestalten zu vermitteln. Solche Fälle für die endgiltige Entscheidung in Ansehung des Zustandes des vorgelegten bestimmten Integrals vorzubereiten, ist Gegenstand und Zweck der nachstehenden Abhandlung.

Um eine für die spätere Handhabung bequemere Form irgend einer etwa der $\varkappa$ten Variation $\delta^\varkappa \mathfrak{S}$ zu gewinnen, sei

$$\frac{\partial}{dU_{m\,m_1}} Z_{m\,m_1} + \frac{\partial}{dU_{m\,m_2}} Z_{m\,m_2} + \frac{\partial}{dU_{m\,m''_{\bar n_m}}} Z_{m\,m''_{\bar n_m}} = \mathfrak{D}_m, \tag{2}$$

so ist bekanntermassen für

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha''_{\bar n_m} = \varkappa \tag{3}$$

die Relation

$$\mathfrak{D}^\varkappa_m \mathfrak{W} = S_{\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha''_{\bar n_m}} \left[\frac{\varkappa!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha''_{\bar n_m}!}\;\frac{\delta^\varkappa \mathfrak{W}}{(d\,U_{m\,m_1})^{\alpha_1}\,(d\,U_{m\,m_2})^{\alpha_2}\ldots(d\,U_{m\,m''_{\bar n_m}})^{\alpha_{\bar n_m}}}\right] = \delta^\varkappa_m \mathfrak{W} \tag{4}$$

die symbolische und wirkliche Bestimmungsgleichung der $\varkappa$ten Variation von $\mathfrak{W}$ in Bezug auf die Function U_m und ihrer bis zum Range $n_m = [m_1] = [m_2] = \ldots = [m_{\bar n_m}]$ reichenden Differentialquotienten, sobald man den Buchstaben $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{\bar n_m}$ alle möglichen der Gleichung (3) entsprechenden Werthe beilegt, und diese Werthsysteme zur Bildung der Summe (4) verwendet.

Für

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2 + \mathfrak{D}_3 + \ldots + \mathfrak{D}_\mu \tag{5}$$

erhält man zur Bestimmung der $\varkappa$ten Variation von $\mathfrak{W}$ in Beziehung auf sämmtliche Functionen $U_1, U_2 \ldots U_\mu$ und ihre bis zu den Ordnungen $n_1, n_2 \ldots n_\mu$ reichenden Differentialquotienten folgende Gleichung:

$$\delta^\varkappa \mathfrak{W} = \frac{\delta^\varkappa}{\varkappa!} \mathfrak{D}^\varkappa \mathfrak{W}. \tag{6}$$

Auf Grundlage der osculatorischen Substitution *

$$Z_m = \frac{\varepsilon\,\varphi_m\, sin^{n_m}\, w}{(2n\pi)^{n_m}}$$
$$w_r = \frac{x_1 - x'_1}{\Delta_1} + \frac{x_2 - x'_2}{\Delta_2} + \ldots + \frac{x_r - x'_r}{\Delta_r}, \quad w = 2n\pi w_r, \quad \frac{d^{n_m}(sin^{n_m} w)}{dw^{n_m}}\varphi_m = \psi_m \tag{8}$$

erhält man vor Allem

$$Z_{m\,m_s} = \varepsilon\,\psi_m \left(m_s \frac{dw_r}{dx}\right), \quad \text{wenn} \quad [m_s] = n_m; \tag{9}$$

hiemit

$$\mathfrak{D}_m = \varepsilon\,\psi_m \left[\frac{\partial}{dU_{m\,m_1}}\left(m_1 \frac{dw_r}{dx}\right) + \frac{\partial}{dU_{m\,m_2}}\left(m_s \frac{dw_r}{dx}\right) + \ldots + \frac{\partial}{dU_{m\,m'_{\bar n_m}}}\left(m'_{\bar n_m} \frac{dw_r}{dx}\right)\right] = \varepsilon\,\psi_m D_m \tag{10}$$

$$\mathfrak{D} = \varepsilon\,[D_1 \psi_1 + D_2 \psi_2 + \ldots D_\mu \psi_\mu] = D\varepsilon \tag{11}$$

und schliesslich

$$\delta^\varkappa \mathfrak{W} = \frac{\rho^\varkappa\,\varepsilon^\varkappa}{\varkappa!} D^\varkappa \mathfrak{W} = \frac{\rho^\varkappa\,\varepsilon^\varkappa}{\varkappa!} M_\varkappa; \quad M_\varkappa = D^\varkappa \mathfrak{W}. \tag{12}$$

Hieraus ergibt sich die in Folge osculatorischer Substitution reducirte Gestalt der $\varkappa$ten Variation von $\mathfrak{S}$ in folgender Form:

$$\delta^\varkappa \mathfrak{S} = \frac{\rho^\varkappa}{\varkappa!} \int_{x'_1}^{x''_1}\int_{x'_2}^{x''_2}\ldots\int_{x'_r}^{x''_r} dx_r\, dx_{r-1}\ldots dx_2\, dx_1\, \varepsilon^\varkappa M_\varkappa. \tag{13}$$

Um der folgenden Untersuchung die möglichste Allgemeinheit zu wahren, nehmen wir an, dass in der Gleichung (1) h Anfangscoefficienten durch identisches Verschwinden die Relationen

* Damit die in Folge osculatorischer Substitution vernachlässigten Bestandtheile irgend eines Gliedes der in der vorigen Abhandlung in Verwendung genommenen Taylor'schen Reihe nicht Überhand gewinnen über ihre späteren Glieder, und hiedurch die Beurtheilung der Nachbarwerthe nicht zu trüben vermögen — setze man zwischen den Grössen ρ und n die jedenfalls erlaubte Relation $\rho \log n = 1$ fest, weil hiebei neben dem sehr gross gedachten n die Grösse ρ noch immer sehr klein ausfällt.

$$A_0 = A_1 = A_2 = \ldots = A_{h-2} = A_{h-1} = 0 \tag{14}$$

veranlassen. Diesfällig gilt $s = 0$ als eine h-fache Wurzel der Gleichung (1). Sind ausserdem die noch übrigen Wurzeln dieser Gleichung sämmtlich gleich bezeichnet, so wird hiedurch eine Anhoffung eines Maximums, beziehungsweise Minimums von $\mathfrak{S}$ begründet. Ob dies wirklich eintritt, stellen wir in Bezug auf die durch $s = 0$ veranlassten Werthsysteme von ψ eine Anfrage an die höheren Variationen des Integrals, um aus der Eigenschaft ihrer Werthsysteme die Gewissheit zu erlangen, ob der, in Folge der nicht verschwindenden Wurzeln angehoffte Zustand von $\mathfrak{S}$ sich auch in Bezug auf die durch $s = 0$ veranlassten Werthsysteme von ψ bewahrheitet oder nicht.

Die Annahme $A_0 = A_1 = \ldots = A_{h-1} = 0$, $A_h \gtrless 0$ setzt voraus, dass in dem Coëfficientenquadrat (10) §. 3, aus welchem die Determinante ∇_0 hervorging, theils einander Glied für Glied gleiche oder proportionirte, theils Glied für Glied verschwindende Horizontalreihen, theils endlich solche Reihen vorfindig sind, welche einer gliedweisen algebraischen Summirung von mehreren anderen mit gewissen Zahlen multiplizirten Reihen ihr Dasein verdanken. In weiterer Folge setzt diese Annahme voraus dass, für $s = 0$ die Gleichungssysteme (5), (6) §. 3 in Bezug auf die Bestimmung der Unbekannten $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_\mu, s_1, s_2 \ldots s_\nu$ sich äquivalent stellen einem Systeme von blos $\mu + \nu - h$ Bestimmungsgleichungen, in welchem nach Ausscheidung derjenigen Verticalreihen von Coëfficienten, welche den ausgeschiedenen Horizontalreihen entsprechen, ein Quadrat von $(\mu + \nu - h)$ Horizontalreihen und ebenso vielen Verticalreihen zurückbleibt, welches eine nicht identisch verschwindende Determinante liefert. Angenommen, dass die auszuscheidenden Verticalreihen den Functionen $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_h$ entsprechen, so kann man mit Hilfe des übriggebliebenen Gleichungssystems die Functionen $\psi_{h+1}, \psi_{h+2} \ldots \psi_\mu, s_1, s_2 \ldots s_\nu$ als lineare Ausdrücke der $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_h$ ausdrücken, und in den Variationsmodul D einführen, welcher dann nach $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_h$ geordnet, sich etwa in folgender Form hinstellt (15)

$$D = (D'_1 \psi_1 + D'_2 \psi_2 + \ldots + D'_h \psi_h) : N' = D' : N' \tag{16}$$

sobald man die oben erwähnte identisch nicht verschwindende Determinante mit N' bezeichnet. Hierbei sind $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_h$ als willkürlich anzusehen, weil die Ableitung des Resultates (16) von der in (31) §. 2 stipulirten unabhängig vor sich ging, und weil in den Gleichungen (5) in Folge $s = 0$ jede Spur verwischt wurde, welche auf eine Abkommenschaft dieser Gleichungen aus der Relation (31), §. 2 erinnern könnte. Für die Zukunft bleibt uns daher unbenommen, zwischen den nun willkürlichen Functionen $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_h$ irgend eine neue den Untersuchungszwecken entsprechende Relation zu stiften.

Auf Grund der Annahme (14) hat man zum Behufe der Bildung der höheren Variationen von $\mathfrak{S}$ folgende Relationen:

$$M_3 = \frac{D'^3 \mathfrak{W}}{N'^3}, \quad M_4 = \frac{D'^4 \mathfrak{W}}{N'^4} \ldots M_\varkappa = \frac{D'^\varkappa \mathfrak{W}}{N'^\varkappa} \ldots \tag{17}$$

Wenn M_3 nicht identisch verschwindet, so findet weder ein Maximum noch ein Minimum statt. Ist jedoch neben $M_3 = 0$, M_4 nicht idendisch Null, so wird ein erweislich constant negatives oder positives Vorzeichen von $M_4 \cdot \Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_r$ auf ein Maximum beziehungsweise Minimum des in Untersuchung stehenden Integrals hinweisen. (18)

Verschwinden mehrere M nach einander identisch, und ist das erste nicht verschwindende M ungeradbezeigert, so findet weder ein Maximum noch ein Minimum statt. Ist jedoch das erste, nicht identisch verschwindende M geradbezeigert, etwa $M_{2\varkappa} \gtrless 0$, so wird ein Maximal- oder Minimalzustand des vorgelegten Integrals nur angehofft. Ob thatsächlich ein Maximum oder Minimum stattfindet oder nicht, hängt bekannterweise vom Erweise ab, ob der Ausdruck M_{2k} im vorgeschriebenen Veränderlichkeitsgebiete der Variablen x und der willkürlichen Functionen ψ ein entsprechend constantes Vorzeichen beurkundet oder nicht.

Vor Allem steht es uns frei, zwischen den Argumenten $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_h$ irgend eine Relation zu stiften; setzt man nun:

$$\chi_{2\varkappa} = (\varrho N')^{2\varkappa} - \psi_1^{2\varkappa} - \psi_2^{2\varkappa} - \ldots - \psi_h^{2\varkappa} = 0, \quad \varrho^2 = \overset{\mu}{\underset{1}{S_m}} \left[\left[(\sin w^n)_{m,n} \right]^2 \right], \tag{19}$$

so wird damit besagt, dass die Argumente ψ im Bereiche der Veränderlichkeit von x nur mit den endlichen Functionen N' und θ gleichzeitig verschwinden dürfen. Die Beschaffenheit von θ und N' bietet uns dagegen vollkommene Bürgschaft dafür, dass ein gleichzeitiges identisches Verschwinden der ψ-Functionen nicht stattfinden darf, und dass die ψ-Functionen im Veränderlichkeitsintervalle stets endliche Werthe beibehalten müssen.

In Bezug auf die Stabilität oder Nichtstabilität des Vorzeichens der Functionswerthe vom $M_{2\varkappa}$ bestimmen wir die Hauptwerthe von $M_{2\varkappa}$ und bezeichnen solche, wie früher mit $(M_{2\varkappa})$. Hiebei werden die Werthe von $x_1, x_2 \ldots x_r$ als constant, und nur die Functionen ψ als Variable angesehen, welche übrigens an die einzige in (19) ersichtliche Bedingung geknüpft sind. Zu diesem Zwecke haben wir in üblicher Weise mit Rücksicht auf (16) und (17)

$$\mathfrak{M}_{2\varkappa} = M_{2\varkappa} + \frac{s'}{N'^{2\varkappa}}\eta = [D'^{2\varkappa}\mathfrak{W} + s'\eta] : N'^{2\varkappa},$$

$$\partial\mathfrak{M}_{2\varkappa} = [2\varkappa\,\partial D'(D'^{2\varkappa-1}\mathfrak{W}) + s'\partial\eta] : N'^{2\varkappa} = 0$$

$$\partial D' = D'_1\partial\psi_1 + D'_2\partial\psi_2 + \ldots + D'_h\partial\psi_h,$$

$$\partial\eta = 2\varkappa[\psi_1^{2\varkappa-1}\partial\psi_1 + \psi_2^{2\varkappa-1}\partial\psi_2 + \ldots + \psi_h^{2\varkappa-1}\partial\psi_h],$$

$$\partial\mathfrak{M}_{2\varkappa} = \frac{2\varkappa}{N'^{2\varkappa}} \mathop{S_p}_1^h \left[\partial\psi_p\,\{D'_p(D'^{2\varkappa-1}\mathfrak{W}) - s'\psi_p^{2\varkappa-1}\}\right] = 0,$$

und können für ein passendes s' die Variationen $\partial\psi_1, \partial\psi_2 \ldots \partial\psi_h$ als willkürlich betrachten, und zur Bestimmung der zu den Hauptwerthen $(M_{2\varkappa})$ führenden Functionen $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_h$ und des Coëfficienten s' nebst der Gleichung (19) noch folgende Gleichungen aufstellen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_1 &= D'_1(D'^{2\varkappa-1}\mathfrak{W}) = s'\psi_1^{2\varkappa-1}, \\ \mathfrak{A}_2 &= D'_2(D'^{2\varkappa-1}\mathfrak{W}) = s'\psi_2^{2\varkappa-1}, \\ &\vdots \\ \mathfrak{A}_h &= D'_h(D'^{2\varkappa-1}\mathfrak{W}) = s'\psi_h^{2\varkappa-1}. \end{aligned} \tag{20}$$

Wenn man die Gleichungen (20) der Reihe nach mit $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_h$ multiplicirt und bei der Summirung der multiplicirten Gleichungen die Relation (19) und das Bildungsgesetz (17) berücksichtigt, so erhält man:

$$(D'_1\psi_1 + D'_2\psi_2 + \ldots + D'_p\psi_h)(D'^{2\varkappa-1}\mathfrak{W}) = s'(\theta N')^{2\varkappa}$$

oder

$$(M_{2\varkappa}) = s'(\theta N')^{2\varkappa} : N'^{2\varkappa} = s\,\theta^{2\varkappa}, \tag{21}$$

und im Gefolge dieser Relation, folgenden Satz:

(22) Die Hauptwerthe von $M_{2\varkappa}$ und hiemit auch sämmtliche im vorgeschriebenen Veränderlichkeitsintervalle liegenden Werthe von $M_{2\varkappa}$ beurkunden ein constantes Vorzeichen oder nicht, je nachdem die aus den Gleichungen (20) gezogenen reellen Werthe von s' gleichbezeichnet erscheinen oder nicht.

(23) Bezeichnet man das gemeinschaftliche Vorzeichen der reellen aus (20) gezogenen Werthe von s' mit $\mathfrak{z}_{s'}$ und das constante Vorzeichen von $\Delta_1\,\Delta_2 \ldots \Delta_r$ mit $\mathfrak{z}_p$, so befindet sich das vorgelegte bestimmte Integral $S = \mathfrak{S}$ im Maximal- oder Minimalzustande, je nachdem die Zeichenproducte $\mathfrak{z}_s\mathfrak{z}_p$ und $\mathfrak{z}_{s'}\mathfrak{z}_p$ gleichzeitig negativ oder positiv sich ergeben.

Wären unter den Systemen von $s', \psi_1, \psi_2 \ldots \psi_h$, welche aus (19) und (20) gezogen werden auch solche reelle Werthsysteme vorhanden, bei welchen s' identisch verschwindet, wären sonst alle übrigen nicht identisch verschwindenden s'-Werthe im gegebenen Interval mit dem gemeinschaftlichen constanten Vorzeichen $\mathfrak{z}_{s'}$ versehen, so schliesst man daraus auf Werthsysteme von ψ, welche der Function $M_{2\varkappa}$ Nullwerthe beibringen, und eben desswegen der $2\varkappa$ten Variation des bestimmten Integrals die Kraft benehmen, in Bezug auf den schliesslichen Zustand des vorgelegten bestimmten Integrals eine Entscheidung herbeizuführen.

Die Eventualität der Existenz identisch verschwindender den Gleichungen (19) und (20) genügender s'-Werthe wird sich begreiflicher Weise dadurch kund thun, dass unter den Relationen

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \ldots = \mathfrak{A}_h = 0 \tag{24}$$

nicht alle von einander unabhängig sich stellen, dass vielmehr nur einige etwa die Relationen

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \ldots = \mathfrak{A}_{h'} \quad \text{für} \quad h' < h \tag{25}$$

sich als selbständige Relationen präsentiren.

In einem solchen Falle sehe man nach, ob auf Grund der selbständigen Relationen (25) die Function $M_{2\varkappa+1}$ identisch verschwindet oder nicht. Für $M_{2\varkappa+1} \gtrless 0$ existirt kein Maximum noch Minimum, hingegen im Falle $M_{2\varkappa+1} = 0$ untersuche man, wie viele von den folgenden Ausdrücken $M_{2\varkappa+1}$, $M_{2\varkappa+3} \ldots$ der Reihe nach verschwinden. Nur in dem Falle wird noch ein Maximal- oder Minimalzustand angehofft, wenn der erste nicht identisch verschwindende Ausdruck der Form $M_{2\varkappa'}$ angehört, und im Angesichte der Bedingungen (25) lauter gleichbezeichnete Hauptwerthe $(M_{2\varkappa'})$ liefert, welche überdies mit den nicht verschwindenden Werthen von $(M_{2\varkappa})$ in Bezug auf ihr gemeinschaftliches Vorzeichen übereinstimmen.

Indem wir den Bedingungen (25) noch die uns aus gleichem Grunde wie früher verstattete Relation

$$\gamma_{2\varkappa'} = (N'\theta)^{2\varkappa'} - \psi_1^{2\varkappa'} - \psi_2^{2\varkappa'} - \ldots - \psi_h^{2\varkappa'} = 0 \tag{26}$$

hinzugesellen, setzen wir zum Behufe der Auffindung der Hauptwerthe $(M_{2\varkappa'})$

$$\mathfrak{M}_{2\varkappa'} = N'^{2\varkappa'} M_{2\varkappa'} + \frac{2\varkappa'}{2\varkappa-1} \mathop{S_p}_{1}^{h'} [s_p \mathfrak{A}_p] + s'' \gamma_{2\varkappa'},$$

und erhalten

$$\partial(M_{2\varkappa'} N'^{2\varkappa'}) = \partial[D'^{2\varkappa'} \mathfrak{W}] = 2\varkappa' \mathop{S_g}_{1}^{h} [\partial\psi_g D'_g (D'^{2\varkappa'-1} \mathfrak{W})];$$

$$\partial \mathfrak{A}_p = \partial[D'_p (D'^{2\varkappa-1} \mathfrak{W}) = D'_p \mathop{S_g}_{1}^{h} [\partial\psi_g D'_g (D'^{2\varkappa-2} \mathfrak{W})](2\varkappa - 1);$$

$$\partial \gamma_{2\varkappa'} = -2\varkappa' \mathop{S_g}_{1}^{h} [\partial\psi_g \psi_g^{2\varkappa'-1}];$$

und dem gemäss

$$\partial \mathfrak{M}_{2\varkappa'} = 2\varkappa' \mathop{S_g}_{1}^{h} \left[\partial\psi_g \Big(D'_g (D'^{2\varkappa'-1} \mathfrak{W}) + \mathop{S_p}_{1}^{h'} [s_p D'_p D'_g (D'^{2\varkappa-2} \mathfrak{W})] - \psi_g^{2\varkappa'-1} s''\Big)\right] = 0. \tag{27}$$

Unter Voraussetzung passend gewählter Coëfficienten s'', $s_1, s_2, \ldots s_{h'}$ kann man die Variationen $\partial\psi_1, \partial\psi_2 \ldots \partial\psi_h$ als völlig willkürlich ansehen, und zur Bestimmung der Functionen s'', s_1, $s_2 \ldots s_{h'}$, $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_h$ nebst den Relationen (25), (26) aus (27) folgende Gleichungen anschreiben:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}'_1 &= D'_1 (D'^{2\varkappa'-1} \mathfrak{W}) + \mathop{S_p}_{1}^{h'} [s_p D_p D'_1 D'^{2\varkappa-2} \mathfrak{W})] = \psi_1^{2\varkappa'-1} s'' \\
\mathfrak{A}'_2 &= D'_2 (D'^{2\varkappa'-1} \mathfrak{W}) + \mathop{S_p}_{1}^{h'} [s_p D_p D'_2 D'^{2\varkappa-2} \mathfrak{W})] = \psi_2^{2\varkappa'-1} s'' \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
\mathfrak{A}'_h &= D'_h (D'^{2\varkappa'-1} \mathfrak{W}) + \mathop{S_p}_{1}^{h'} [s_p D'_p D'_h D'^{2\varkappa-2} \mathfrak{W})] = \psi_h^{2\varkappa'-1} s''.
\end{aligned} \tag{28}$$

Multiplicirt man die Relationen (28) der Reihe nach mit $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_h$ und berücksichtigt bei ihrer Summirung die Gleichung (26), so erhält man:

$$D'(D'^{2\varkappa'-1} \mathfrak{W}) + \mathop{S_p}_{1}^{h'} [s_p D'_p D'(D'^{2\varkappa-2} \mathfrak{W})] = s''(N'\theta)^{2\varkappa'}$$

oder

$$D'^{2\varkappa'}\mathfrak{W} + \mathop{S}_{1}^{h'}{}_{p}[s_p D'_p(D'^{2\varkappa-1}\mathfrak{W})] \qquad = s''(N'\theta)^{2\varkappa'}$$

und auch

$$D'^{2\varkappa'}\mathfrak{W} + \mathop{S}_{1}^{h'}{}_{p}[s_p \mathfrak{A}_p] \qquad = s''(N'\theta)^{2\varkappa'} \tag{29}$$

endlich in Folge der in (17) ersichtlichen Bildung der Ausdrücke $M_\varkappa$, sowie in Folge der Bedingungen (25) erhält man aus (29) die Relation

$$(M_{2\varkappa'}) = s''\theta^{2\varkappa'}, \tag{30}$$

aus welcher in der gepflogenen Weise geschlossen wird, dass das vorgelegte Integral sich im Maximum oder Minimum befindet, je nachdem erweislich das entsprechende gemeinschaftliche constante Vorzeichen der aus (29) (26) gezogenen s''-Werthe mit dem ebenfalls constanten Vorzeichen von $\Delta_1\, \Delta_2 \ldots \Delta_r$ sich verschieden oder übereinstimmend ergibt.

Wenn wir in der stufenweise aufeinander folgenden Untersuchung der Ausdrücke $M_{2\varkappa}$, $M_{2\varkappa'}$, $M_{2\varkappa''}, \ldots$ fortschreitend jedesmal eine Hindeutung auf dasselbe constante Vorzeichen der nicht verschwindenden Werthe dieser Ausdrücke bestätigt finden, so müssen wir mit Rücksicht auf den Umstand, dass jedes folgende M von einer grösseren Anzahl von Bedingungsgleichungen begleitet wird als das vorhergehende, endlich zu einem Ausdrucke $M_{2\varkappa^{(n)}}$ gelangen, dessen constantes oder nicht constantes Vorzeichen einen unzweifelhaften Schluss auf den eigentlichen Zustand des vorgelegten Integrals gestattet.

Die Ableitung des Resultates (8) §. 3 der vorigen Abhandlung und des Resultates (30) in dieser Abhandlung, beruht offenbar auf der besonderen Eigenschaft der Bedingungsgleichungen, welche in beiden Fällen in Bezug auf die als Variable gedachten Argumente ψ homogene Functionen, und zwar im ersten Falle des ersten, im letzten hingegen des $(2\varkappa-1)$ten Ranges darstellen. Die Ableitung des Resultates (21) betrifft die Untersuchung des Ausdruckes $M_{2\varkappa}$, welcher ursprünglich von $\beta+\nu-h$ homogenen linearen Bedingungsgleichungen begleitet war, welcher jedoch an die Stelle des ursprünglichen Variationsmoduls $D = D_1\psi_1 + D_2\psi_2 + \ldots + D_\mu\psi_\mu$ den auf Grundlage der linearen Bedingungen reducirten Variationsmodul $D' = D'_1\psi_1 + D'_2\psi_2 + \ldots + D'_h\psi_h$ in seinen Bau aufnehmend, von da ab ohne weitere Rücksicht auf diese Bedingungsgleichungen das verlangte Resultat (21) vermittelt. Bei der Aufnahme der Untersuchung irgend eines bestimmten Falls ist es rathsam, schon im Ausdrucke M_2 den Variationsmodul D auf Grund der vorliegenden Bedingungen $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_\nu = 0$ zu reduciren, um dann mit gleichem Erfolge die weitere Untersuchung unabhängig von diesen Bedingungen zu führen. Bei dieser Gelegenheit wird man ein etwaiges identisches Verschwinden von M_2 auf der Stelle wahrnehmen, und sofort zur Untersuchung der weiteren M schreiten, bis man zu einem nicht identisch verschwindenden M gelangt. Ist dann das erste nicht verschwindende M ungradbezeigert, so schliesst man ohne weitere Forschung auf das Nichtvorhandensein eines Maximums oder Minimums. Ist jedoch das erste nicht verschwindende M etwa der Ausdruck $M_{2\varkappa}$, so wird die weitere Untersuchung in der eben in diesem Paragraph exponirten Weise angelegt und fortgesetzt, uns schliesslich den Zustand des vorgelegten Integrals unzweideutig erkennen lassen.

